Ejercicios de Análisis Matemático

Números complejos - Soluciones

1. Supuesto que $x = x + iy$ es un número complejo, calcula la parte real e imaginaria del número

$$w = \frac{z+i}{z-i}.$$

Solución. Multiplicamos por el conjugado del denominador:

$$w = \frac{x + i(y+1)}{x + i(y-1)} = \frac{\big(x + i(y+1)\big)\big(x - i(y-1)\big)}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} + i\,\frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}.$$

Por tanto:

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2}, \quad \operatorname{Im}(w) = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}.$$

2. Calcula:

$$\text{a)}\ \ |(-1+i)^9(2-i)| \qquad \text{b)}\ \ \left|\frac{5 - \sqrt{3}i}{\sqrt{2} - i(\sqrt{5}+1)}\right|$$

Solución. a) Usamos que el módulo de un producto es el producto de los módulos.

$$|(-1+i)^9(2-i)| = |(-1+i)^9||(2-i)| = |(-1+i)|^9|(2-i)| = (\sqrt{2})^9\sqrt{5} = 16\sqrt{10}.$$

b) Usamos que el módulo de un cociente es el cociente de los módulos.

$$\left|\frac{5 - \sqrt{3}i}{\sqrt{2} - i(\sqrt{5}+1)}\right| = \frac{|5 - \sqrt{3}i|}{|\sqrt{2} - i(\sqrt{5}+1)|} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{2 + (\sqrt{5}+1)^2}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{8 + 2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{4 + \sqrt{5}}}$$

☺

3. Calcula los números complejos $z = x + iy$ tales que $w = \dfrac{2z-1}{z-2}$ es:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

c) Un número de módulo 1.

Solución. Pongamos $z = x + iy$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} w &= \frac{2x - 1 + i2y}{x - 2 + iy} = \frac{(2x - 1 + i2y)(x - 2 - iy)}{(x-2)^2 + y^2} = \frac{(2x-1)(x-2) + 2y^2 + i(-y(2x-1) + 2y(x-2))}{(x-2)^2 + y^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2y^2 - 5x + 2}{(x-2)^2 + y^2} + i\,\frac{-3y}{(x-2)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$w \text{ es real } \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(w) = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \Longleftrightarrow z \text{ es real.}$$

$$w \text{ es imaginario puro } \Longleftrightarrow \operatorname{Re}(w) = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 5x + 2 = 0.$$

La ecuación

$$2x^2 + 2y^2 - 5x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \Longleftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{16}$$

representa una circunferencia de centro $(5/4, 0)$ y radio $3/4$.

Usando que el módulo de un cociente es el cociente de los módulos, tenemos que:

$$|w|=1\Longleftrightarrow|w|^2=\frac{(2x-1)^2+4y^2}{(x-2)^2+y^2}=1\Longleftrightarrow(2x-1)^2+4y^2=(x-2)^2+y^2\Longleftrightarrow x^2+y^2=1\Longleftrightarrow|z|=1.$$

De otra manera:

$$|w|^2=w\overline{w}=\frac{2z-1}{z-2}\,\frac{2\overline{z}-1}{\overline{z}-2}=\frac{4|z|^2+1-2(z+\overline{z})}{|z|^2+4-2(z+\overline{z})}=1\Longleftrightarrow|z|^2=1\Longleftrightarrow|z|=1.$$

☺

4. Expresa los siguientes números en forma cartesiana:

$$\text{a) } (-1+i\sqrt{3})^{11} \quad \text{b) } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6 \quad \text{c) } (-\sqrt{3}+i)^{13}$$

Solución. Para calcular potencias de números complejos se usa la fórmula de De Moivre[1].

a) Pongamos $z=-1+i\sqrt{3}$. Este número complejo está en el segundo cuadrante, por tanto su argumento principal estará comprendido entre $\pi/2$ y π y viene dado por:

$$\arg(z)=\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})+\pi=-\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3})+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}.$$

Tenemos también que $|z|=2$. Por tanto:

$$\begin{aligned} z^{11} &= 2^{11}\left(\cos\frac{22\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{22\pi}{3}\right)=2^{11}\left(\cos(7\pi+\pi/3)+i\operatorname{sen}(7\pi+\pi/3)\right)=\\ &= 2^{11}\left(-\cos(\pi/3)-i\operatorname{sen}(\pi/3)\right)=2^{11}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2^{10}(1+i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

b) Pongamos $w=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$. Para calcular un argumento de w usaremos que si a y b son números complejos, s es un argumento de a y t es un argumento de b, entonces $s-t$ es un argumento de a/b. Tenemos:

$$\arg(1+i\sqrt{3})=\frac{\pi}{3},\ \arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}\Longrightarrow\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7\pi}{12}.$$

Por tanto $7\pi/12$ es un argumento de w. (resulta, además, que es el argumento principal, pero esto es lo de menos). Como $|w|=2/\sqrt{2}=\sqrt{2}$, la fórmula de De Moivre nos dice que:

$$w^6=(\sqrt{2})^6\left(\cos(42\pi/12)+i\operatorname{sen}(42\pi/12)\right)=8\left(\cos(3\pi+\pi/2)+i\operatorname{sen}(3\pi+\pi/2)\right)=-8i.$$

c) Es muy parecido al apartado a). ☺

5. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } z^4=i \quad \text{b) } z^3=-1+i\sqrt{3} \quad \text{c) } z^4-i\sqrt{3}\,z^2-1=0$$

Solución. a) Nos piden calcular las raíces cuartas de i. Como $\arg(i)=\pi/2$ y, claro está, $|i|=1$, tenemos que las raíces cuartas de i son:

$$z_k=\cos\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{4}\right),\quad k=0,1,2,3.$$

Podemos calcular sus valores exactos sabiendo que

$$\operatorname{sen}(\pi/8)=\frac{2-\sqrt{2}}{2},\quad \cos(\pi/8)=\frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

[1] Puedes usar también el binomio de Newton pero no te lo aconsejo.

Pero eso te lo dejo para que tú lo hagas.

b) Nos piden calcular las raíces terceras de $-1+i\sqrt{3}$. Como $\arg(-1+i\sqrt{3})=2\pi/3$ y $|-1+i\sqrt{3}|=2$, tenemos que las raíces terceras de $-1+i\sqrt{3}$ son:

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi/3+2k\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi/3+2k\pi}{3}\right)\right), \quad k=0,1,2.$$

En este caso no merece la pena simplificar más, salvo si quieres tomarte el trabajo de calcular los valores exactos del seno y el coseno de $\pi/9$.

c) Es una ecuación bicuadrada; para resolverla hacemos el cambio $z^2=w$ y calculamos las soluciones de la ecuación $w^2-i\sqrt{3}\,w-1=0$, que vienen dadas por la fórmula usual:

$$\alpha=\frac{i\sqrt{3}+\sqrt{(-i\sqrt{3})^2+4}}{2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \quad \beta=\frac{i\sqrt{3}-\sqrt{(-i\sqrt{3})^2+4}}{2}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Debemos ahora resolver las ecuaciones $z^2=\alpha$ y $z^2=\beta$, es decir, calcular las raíces cuadradas de α y β. Tenemos que $\arg(\alpha)=\pi/3$, $\arg(\beta)=2\pi/3$, ambos complejos tienen modulo 1. Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{\alpha}=\cos(\pi/6)+i\,\text{sen}(\pi/6)=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}\\
z_2 &= -\sqrt{\alpha}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{1}{2}\\
z_3 &= \sqrt{\beta}=\cos(2\pi/6)+i\,\text{sen}(2\pi/6)=\cos(\pi/3)+i\,\text{sen}(\pi/3)=\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\\
z_4 &= -\sqrt{\beta}=-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

☺

6. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$.

Solución. Pongamos $z=\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi$. Usando la fórmula de De Moivre y desarrollando la potencia por el binomio de Newton, tenemos que:

$$z^4=\cos(4\varphi)+i\,\text{sen}(4\varphi)=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\,\text{sen}^2\varphi+\text{sen}^4\varphi+i\,(4\cos^3\varphi\,\text{sen}\,\varphi-4\cos\varphi\,\text{sen}^3\varphi).$$

Igualando partes reales:

$$\begin{aligned}
\cos(4\varphi) &= \cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\,\text{sen}^2\varphi+\text{sen}^4\varphi=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi(1-\cos^2\varphi)+(1-\cos^2\varphi)^2=\\
&= 8\cos^4\varphi-8\cos^2\varphi+1.
\end{aligned}$$

☺